



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲

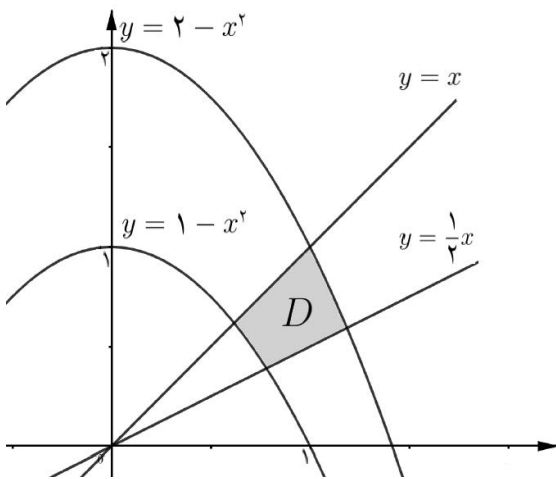
یکشنبه ۱۴۰۱/۳/۲۲

مدت زمان: ۱۱۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

تذکر: ۱- در زمان برگزاری آزمون مراقبین محترم مجاز به پاسخ دادن به هیچ سوالی (اعم از درسی و غیر درسی) نیستند.
۲- استفاده از هر نوع ماشین حساب در جلسه آزمون ممنوع است.



۱. فرض کنید ناحیه D مطابق شکل، واقع در ربع اول و محصور به چهار منحنی $y = 2 - x^2$, $y = 1 - x^2$, $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x$ باشد. مقدار

$$\iint_D \frac{y + 2x^2}{y^2} dA$$

را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

۲. فرض کنید C خم پارامتری $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ باشد که در آن $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$. با در نظر گرفتن میدان برداری

$$F(x, y, z) = (2xyz^3 + ye^{xy}, x^2z^3 + xe^{xy}, 3x^2yz^2 + \cos z)$$

مقدار $\int_C F \cdot dr$ را بیابید. (۱۵ نمره)

۳. میدان برداری $F(x, y, z) = (x + ye^z, y - xe^z, z)$ و ناحیه سه بعدی D محصور به استوانه $x^2 + y^2 = 9$ و صفحات $z = 0$ و $z = 5$ را در نظر بگیرید. فرض کنید S مرز ناحیه D و N قائم یک بر S و رو به خارج D باشد.

$$\text{مقدار } \oint_S F \cdot N dS \text{ را}$$

الف) از راه مستقیم بیابید. (۱۵ نمره)

ب) با استفاده از قضیه دیورژانس بیابید. (۱۵ نمره)

موفق باشید.

باسم سنو ۱:

$$I = \iint_D \frac{y + rx^r}{y^r} dA$$

باسم سنو ۱

$$u = y + x^r$$

$$1 \leq u \leq r$$

$$v = \frac{x}{y}$$

$$1 \leq v \leq r$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} r x & 1 \\ 1/y & -x/y^r \end{vmatrix} = -\frac{rx^r}{y^r} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{y^r}{rx^r + y}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^r \int_1^r \frac{y + rx^r}{y^r} \times \frac{y^r}{rx^r + y} du dv = 1$$

باسم سنو ۲

$$u = y + x^r$$

$$1 \leq u \leq r$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$1/r \leq v \leq 1$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} rx & 1 \\ -y/x^r & 1/x \end{vmatrix} = r + \frac{y}{x^r}$$

$$E = \int_1^r \int_{1/r}^1 \frac{x^r}{rx^r + y} \times \frac{y + rx^r}{y^r} dr du$$

$$= \int_1^r \left(\int_{1/r}^1 \frac{1}{r^r} dr \right) du = \left[-\frac{1}{r} \right]_{1/r}^1 =$$

$$-1 - (-r) = 1$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

نوع کنیز c هم

مسئله

$$\mathbf{F} = (2xy z^2 + y e^y, x^2 z^2 + x e^y, 3x^2 y z^2 + \cos z)$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{مطلوبت محاسبه}$$

$$\text{حل: چون } \mathbf{F} = (P, Q, R)$$

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 2xz^2 + e^y + y e^y = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 4xy z = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 3x^2 z^2 = \frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

محاسبه شرایط (*) : $\frac{1}{2} \quad \mathbf{F} = 0$ ، $\frac{1}{2}$ که نمره

[به جای بررسی شرایط (*) همان شکل دارد $\text{curl } \mathbf{F} = 0$]

و دانسته $\mathbf{F}$ برابر $\mathbf{R}$ است که منبسط ده است بنابراین $\mathbf{F}$ یک پتانسیل است. پس $\mathbf{F} = \nabla \phi$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(C(1)) - \phi(C(0))$$

حال تابع پتانسیل ϕ را بیابیم.

$$\mathbf{F} = \nabla \phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_x = 2xy z^2 + y e^y & (1) \\ \phi_y = x^2 z^2 + x e^y & (2) \\ \phi_z = 3x^2 y z^2 + \cos z & (3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{در واقع قرارداد } \mathbf{F} = \nabla \phi \Rightarrow (2) \text{ نمره}}$$

$$(1) \xrightarrow{\text{انتگرال گیری نسبت به } x} \phi(x, y, z) = x^2 y z^2 + e^y + c(y, z) \quad (4)$$

به دست آمدن تابع پتانسیل : 4 نمره

$$(۴) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_y = x^2 z^r + x e^y + \frac{\partial c}{\partial y} \stackrel{(۱)}{=} x^2 z^r + x e^y \\ \varphi_z = x^2 y z^r + \frac{\partial c}{\partial z} \stackrel{(۲)}{=} x^2 y z^r + \cos z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial z} = \cos z \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \sin z + k \quad \Rightarrow \varphi = x^2 y z^r + e^y + \sin z + k$$

$$\Rightarrow \int_c F \cdot dr = \varphi(0, 1, \pi/4) - \varphi(1, 0, 0) = 2 + k - 1 - k = 1$$

محاسبه انتگرال ۳ فرجه

برای متن به هم تائیل در مثال: روش زیر نیز عمل کرد

$$\left. \begin{aligned} \text{از رابطه (۱) انتگرال بست:} & \Rightarrow x^2 y z^r + e^y \\ \text{از رابطه (۲) انتگرال بست:} & \Rightarrow x^2 y z^r + e^y \\ \text{از رابطه (۳) انتگرال بست:} & \Rightarrow x^2 y z^r + \sin z \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\varphi = x^2 y z^r + e^y + \sin z + c$$

حرکت از مبدا (شماره ریزشگر)
رایجاً در رسم

روش دوم: هم چنین در مثال برای محاسبه به هم تائیل از انتگرال خط نیز استفاده کرد:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_0^1 F(t, x, t, y, t, z) \cdot (x, y, z) dt + C_1 \\ &= \int_0^1 \left[t x^2 y z^r + t x y e^{t y} + t x y z^r + t x y e^{t y} \right. \\ &\quad \left. + t x^2 y z^r + z \cos(tz) \right] dt + C_1 \\ &= x^2 y z^r t^4 + e^{t y} + \sin(tz) \Big|_0^1 + C_1 \\ &= x^2 y z^r + e^y + \sin z + C_1 \end{aligned}$$

① محاسبه شرایط $\frac{L}{F} = 0$: [۵ نمره]

② قراردادن $F = 74$ و بدست آوردن F_2, F_3, F_4 : [۲ نمره]

③ محاسبه تابع جابجایی (با حرکت از سرزن تهنه نه) : [۴ نمره]

④ محاسبه $\int_0^L F \cdot dx$: [۴ نمره]

نتیجه اگر دانشمندی شرایط $\frac{L}{F} = 0$ را بررسی کنید باید بدانی تابع جابجایی چیست. اگر در جواب این نتیجه را به دست بیاورید باید بدانی زمان صفت اول هم داد شود.

فرض کنید V ناحیه‌ی محصور به استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 9$ و صفحات $z=0$, $z=5$ باشد و $\vec{F} = (x+ye^z)\vec{i} + (y-xe^z)\vec{j} + (z)\vec{k}$ را

در تمام به بر که در رویه خارج که باشد، مطرب

الف) $\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$ را به طری مستقیم محاسبه ساز
ب) $\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$ را با استفاده از قضیه دیورانس

سطح $z=0$ (نمره ۴)
سطح استوانه (نمره ۶)
سطح $z=5$ (نمره ۴)
جمع سطح (نمره ۴)

نویس حکم قضیه و محاسبه $\text{div } \vec{F}$ (نمره ۷) محاسبه انتگرال به طری (نمره ۸)

$S_1 : z=0$ (حل: الف)

$$\vec{N}_1 dS = -(0, 0, 1) dx dy \quad (\text{نمره ۲})$$

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}_1 dS = \iint_D -z dx dy = 0 \quad (D : x^2 + y^2 \leq 9) \quad (\text{نمره ۲})$$

$S_2 : x^2 + y^2 = 9$ استوانه‌ی $\rightarrow r(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, z)$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 5$ (نمره ۱)

$$(\text{نمره ۲}) \begin{cases} \vec{N}_2 dS = +(\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z) dz d\theta \\ \vec{r}_\theta = (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0) \\ \vec{r}_z = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{N}_2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^5 9 dz d\theta = 9(5)(2\pi) = 90\pi \quad (\text{نمره ۲})$$

روش دوم محاسبه شار خروجی برای رویه استوانه: $x^2 + y^2 = 9$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow N_r dS = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|} dz dy$$

$$(2 \text{ نمره}) = \pm \frac{(2x, 2y, 0)}{|2x|} dz dy$$

حالت لعل برای
x های مثبت :

$$N_r dS = + \left(1, \frac{y}{x}, 0 \right) dz dy$$

$$= \left(1, \frac{y}{\sqrt{9-y^2}}, 0 \right) dz dy$$

$$\Rightarrow \iint_{S_r} F \cdot N_r dS = \int_{-3}^3 \int_0^{\omega} \left(\sqrt{9-y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{9-y^2}} \right) dz dy$$

$$= \int_{-3}^3 \int_0^{\omega} \frac{9}{\sqrt{9-y^2}} dz dy = 9_0 \int_0^{\omega} \frac{dy}{\sqrt{9-y^2}}$$

$$y = 3 \sin \theta \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$= 9_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos \theta}{3 \cos \theta} d\theta = 45\pi$$

محاسبه انتگرال (2 نمره)

حالت دوم برای
x های منفی :

$$\iint_{S_r} F \cdot N_r dS = 45\pi$$

به طور مشابه (1 نمره)

$$\Rightarrow \iint_{S_r} F \cdot N_r dS = 45\pi + 45\pi = 90\pi$$

حالت لعل + حالت دوم
(روش اول استوانه) (1 نمره)

$$S_3: Z = \omega \quad N_3 dS = +(\omega, \omega, 1) dx dy \quad (\text{نقطة ٢})$$

حاجبه انتگرال (نقطة ٢)

$$\left\{ \begin{aligned} \iint_{S_3} F \cdot N_3 dS &= \iint_{D_\omega} Z dx dy = \omega \left(\iint_D dA \right) \\ \left| D: x^2 + y^2 \leq 9 \right| &: \omega \left(\frac{\pi \cdot 9}{1} \right) = \omega (\pi \cdot 9) = 9\omega\pi \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot N dS = \iint_{S_1} F \cdot N_1 dS + \iint_{S_2} F \cdot N_2 dS + \iint_{S_3} F \cdot N_3 dS \quad (\text{نقطة ١})$$

$$= 9\omega\pi + 9\omega\pi = 18\omega\pi$$

$$\iint_S F \cdot N dS = \iiint_V \text{div} F dV \quad (\text{ب})$$

نظير

$$\left| \text{div} F = 1 + 1 + 1 = 3 \right| \quad (\text{نقطة ٧})$$

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot N dS = 3 \iiint_V dV$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\omega} r dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r (\omega - 0) dr d\theta \quad \left. \begin{aligned} & \text{حاجبه انتگرال نهایی} \\ & (\text{نقطة ٨}) \end{aligned} \right\}$$

$$= 18(2\pi) \left(\frac{9}{2} \right) = 18(9\pi) = 162\pi$$

$$\hookrightarrow 3 \iiint_V dV = 3 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 3(9\pi(\omega)) = 162\pi$$