بسمه تعالی

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی دو (آبان ۹۸) — زمان: ۳ ساعت

---

۱. فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $m \times n$ و $n \times m$ باشند که $\det(AB) \neq 0$. نشان دهید ستون‌های A بردارهایی مستقل خطی در $\mathbb{R}^m$ اند. (۱۰ نمره)

۲. فاصله دو زیر فضای مستوی (صفحه تعمیم یافته) زیر چقدر است. (۱۵ نمره)

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{array}{c} s_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} t_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\rangle, \quad \pi_2 = \left\langle \begin{array}{c} s_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} t_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\rangle$$

۳. الف. فرض کنید v بردار ویژه ماتریس A با مقدار ویژه λ است. نشان دهید A^t نیز دارای بردار ویژه با مقدار ویژه λ است. (۱۰ نمره)

ب. نشان دهید v بردار ویژه ماتریس $B = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_k A^k$ نیز است و مقدار ویژه متناظرش را بدست آورید. (۱۰ نمره)

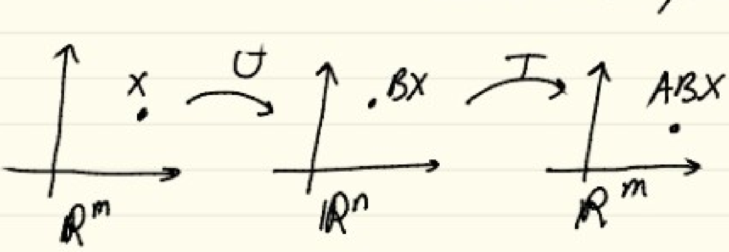
۴. بردارهای T, N, B و انحنا و تاب خم $\gamma(t) = (\cos t \sin t, \sin^2 t, \cos t)$ را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

۵. فرض کنید $\gamma_1(s)$ پرمایش برحسب طول خم C_1 با انحنا و تاب مثبت در همه نقاط باشد. نشان دهید $\gamma_2(s) = \int_0^s B_1(u)du$ که در آن B_1 بردار سوم کنج فرنه خم C_1 است، پرمایش برحسب طول خم C_2 است که برای آن $\kappa_2(s) = \tau_1(s)$ و $\tau_2(s) = \kappa_1(s)$. (۱۰ نمره)

۶. نشان دهید اگر E_1, E_2 دو زیر فضای مستوی موازی (نه لزوما هم بعد) در $\mathbb{R}^n$ باشند و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی باشد آنگاه $f(E_1), f(E_2)$ نیز موازی اند (اگر یک زیر فضای مستوی داخل دیگری باشد نیز آن دو را موازی می‌گوییم). (۱۰ نمره)

موفق باشید

۱) A و B ماتریس های متناظر نگاشتهای خطی $U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ اند:



$\det(AB)\neq 0$ یعنی AB یک نگاشت وارون پذیر از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^m$ است. بنابراین هسته آن $\{0\}$ و تصویرش کل $\mathbb{R}^m$ است.

$$BX=0 \Rightarrow ABX=0 \Rightarrow X\in \ker(AB)=\{0\} \Rightarrow \ker B=\{0\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} B = m$$

از طرفی فضای تصویر B فضای تولید شده توسط ستونهای آن است و چون تعداد ستونهای B، m تا است پس این ستون ها به عنوان بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باید مستقل خطی باشند تا فضای m بعدی را تولید کنند.

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Im} AB = \{ABX : X\in\mathbb{R}^m\} = \{AY : Y=BX, X\in\mathbb{R}^m\} \subseteq \{AY : Y\in\mathbb{R}^n\} = \operatorname{Im} A \subseteq \mathbb{R}^m$$

بنابراین ستون های A کل فضای $\mathbb{R}^m$ را تولید می کنند. به عبارت دیگر بعضی از آنها (با حذف تعدادی از آنها) یک پایه برای $\mathbb{R}^m$ تشکیل می دهند. یعنی m تا بردار مستقل خطی در بین آنها است.

★ افرادی که در حالت خاص $m=n$ حکم را ثابت کرده اند (در صورتی که تعمیم کرده باشند استدلالشان تنها در این حالت درست است) ۱ نمره

افرادی که مثال نقض برای حکم سوال زده اند: نیم نمره. افرادی که حکم سوال را درست بیان کرده و اثبات درستی برای آن ارائه کرده اند ۶ نمره

۲) با توجه به روابط روبرو نقطه $\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}$ در هر دو صفحه قرار دارد. بنابراین فاصله آنها صفر است.

$$\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \in \pi_1 \quad , \quad \begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \in \pi_2$$

* افرادی که تنها ذکر کرده‌اند که این دو صفحه اشتراک ناتهی دارند ۱۰ نمره

* افرادی که ذکر کرده‌اند که فاصله دو صفحه برابر $\|A-B\|$ که در آن $A \in \pi_1$, $B \in \pi_2$, $A-B \perp \pi_1, \pi_2$
ولی محاسبه نکرده‌اند یا اشتباه محاسبه کرده‌اند ۱۲ نمره.

۳) الف: λ مقدار ویژهٔ A است $\Longleftrightarrow \det(\overbrace{A-\lambda I}^{B})=0 \Longleftrightarrow \det B^t=0 \Longleftrightarrow \det(\underbrace{A^t-\lambda I^t}_{A^t-\lambda I})=0$
$\Longleftrightarrow$ λ مقدار ویژهٔ A^t است.

ب:

$$Av=\lambda v \implies A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$$

به همین صورت و با استقرا نشان می‌دهیم که: $A^k v = \lambda^k v$

$$A^k v = A(A^{k-1}v) = A(\lambda^{k-1}v) = \lambda^{k-1}Av = \lambda^k v$$

بردار ویژه B — مقدار ویژهٔ ماتریس B متناظر v

$$\implies Bv = (a_0 I + \cdots + a_k A^k)v = a_0 v + a_1\lambda v + \cdots + a_k \lambda^k v = (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k)\, v$$

$$\gamma(t)=\begin{bmatrix}\sin t\cos t \xrightarrow{\quad} \frac{\sin 2t}{2}\\ (\sin t)^2\\ \cos t\end{bmatrix},\qquad \dot\gamma(t)=\begin{bmatrix}\cos^2 t-\sin^2 t\\ 2\sin t\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\\ -\sin t\end{bmatrix},\qquad \kappa(t)=|\dot\gamma(t)|=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

۱ نمره ، ۱ نمره ، ۴

$$\ddot\gamma(t)=\begin{bmatrix}-2\sin 2t\\ 2\cos 2t\\ -\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\sin t\cos t\\ 2(\cos^2 t-\sin^2 t)\\ -\cos t\end{bmatrix},\qquad \dddot\gamma(t)=\begin{bmatrix}-4\cos 2t\\ -4\sin 2t\\ \sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4(\cos^2 t-\sin^2 t)\\ -8\sin t\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}$$

۱ نمره ، ۱ نمره

$$\dot\gamma\times\ddot\gamma=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\\ -\sin t\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\sin 2t\\ 2\cos 2t\\ -\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin 2t\cos t+2\sin t\cos 2t\\ 2\sin t\sin 2t+\cos 2t\cos t\\ 2\underbrace{(\cos^2 2t+\sin^2 2t)}_{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\sin^3 t\\ \cos t(1+2\sin^2 t)\\ 2\end{bmatrix}$$

۱ نمره

$$(\dot\gamma\times\ddot\gamma)\cdot\dddot\gamma=-4\Big(\cancel{\cos 2t\sin 2t\cos t}+\underbrace{2\cos^2 2t\sin t+2\sin^2 2t\sin t}_{2\sin t}+\cancel{\cos 2t\sin 2t\cos t}\Big)+2\sin t=-6\sin t$$

$$\|\dot\gamma\times\ddot\gamma\|^2=\sin^2 2t\cos^2 t+4\sin^2 t\cos^2 2t-\cancel{4\sin t\cos t\sin 2t\cos 2t}+4\sin^2 t\sin^2 2t+\cos^2 2t\cos^2 t+\cancel{4\sin t\cos t\sin 2t\cos 2t}+4$$

$$=4+\cos^2 t+4\sin^2 t=5+3\sin^2 t\quad\Rightarrow\quad\|\dot\gamma\times\ddot\gamma\|=\sqrt{5+3\sin^2 t}$$

۲ نمره

$$T(t)=\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \Longrightarrow T(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\begin{bmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\\ -\sin t\end{bmatrix}$$

۲ نمره

$$\kappa(t)=\frac{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|}{v(t)^3}=\left(\frac{5+3\sin^2 t}{(1+\sin^2 t)^3}\right)^{1/2}$$

۲ نمره

$$\tau(t)=\frac{\left(\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\right)\cdot\dddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|^2}=\frac{-6\sin t}{5+3\sin^2 t}$$

۲ نمره

$$B(t)=\frac{\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{5+3\sin^2 t}}\begin{bmatrix}-2\sin^3 t\\ \cos t(1+2\sin^2 t)\\ 2\end{bmatrix}$$

۲ نمره

$$N(t)=B(t)\times T(t)=\left(\frac{1}{(5+3\sin^2 t)(1+\sin^2 t)}\right)^{1/2}\begin{bmatrix}-\cos t\sin t(1+2\sin^2 t)-4\sin t\cos t\\ 2\cos 2t-2\sin^3 t\\ -2\sin^3 t\sin 2t-\cos t\cos 2t(1+2\sin^2 t)\end{bmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{(5+3\sin^2 t)(1+\sin^2 t)}\right)^{1/2}\begin{bmatrix}\sin t\cos t(1+2\cos^2 t)\\ 2\cos^4 t-4\sin^4 t\\ -\cos t\end{bmatrix}$$

(۵ $r_2(s)=\int_0^s B_1(u)\,du \Rightarrow \dot{r}_2(s)=B_1(s)$ (۲ نمره) $\Rightarrow |\dot{r}_2(s)|=|B_1(s)|=1$ (۱ نمره)

بنابراین $r_2(s)$ یک پرمایش برحسب طول خم C_2 است و $T_2(s)=B_1(s)$ (۱ نمره)

$$\dot{T}_2(s)=\dot{B}_1(s)=-\tau_1(s)N_1(s) \Rightarrow \kappa_2(s)=\|\dot{T}_2(s)\|=\|-\tau(s)N_1(s)\|=\tau_1(s)$$ (۲ نمره)

چون τ_1 همه جا مثبت است.

$$N_2(s)=\frac{1}{\kappa_2(s)}\dot{T}_2(s)=-N_1(s)$$ (۱ نمره) $$\Rightarrow B_2(s)=T_2(s)\times N_2(s)=B_1(s)\times(-N_1(s))=T_1(s)$$ (۱ نمره)

$$\left.\begin{aligned}\dot{N}_2(s)&=-\kappa_2(s)T_2(s)+\tau_2(s)B_2(s)=\tau_2(s)T_1(s)-\overbrace{\kappa_2(s)}^{\tau_1(s)}B_1(s)\\ &=-\dot{N}_1(s)=-(-\kappa_1(s)T_1(s)+\tau_1(s)B_1(s))\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tau_2(s)=\kappa_1(s)$$ (۲ نمره)

(۶ دو زیرفضای مستوی موازی اند اگر انتقالی از یکی از آنها وجود داشته باشد که داخل دیگری قرار گیرد: مثلاً $E_1+a\subseteq E_2$

(یا به عبارت دیگر این دو انتقال‌هایی از دو زیرفضای $V_1\subseteq V_2$ در $\mathbb{R}^n$ باشند). در این صورت

$$f(E_1)+f(a)=f(E_1+a)\subseteq f(E_2)$$

یعنی انتقالی از $f(E_1)$ داخل $f(E_2)$ قرار می‌گیرد و در نتیجه $f(E_1)$ موازی $f(E_2)$ است.