بسمه تعالی

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی۲، دی ۹۸ — زمان: ۳ ساعت

در سوال‌های چند قسمتی می‌توانید از نتیجه قسمت‌های بالاتر اگر چه آن را حل نکرده باشید در قسمت‌های پایین‌تر استفاده کنید.

۱. تابع $f(x,y,z) = (x^3 + x - y, y^3 + y + x, z^3 + z)$ روی کل $\mathbb{R}^3$ تعریف شده است.

الف. مشتق تابع f را محاسبه کنید و نشان دهید که در همه نقاط مشتق یک به یک است. (۵ نمره)

ب. نشان دهید تابع f یک به یک است. (راهنمایی: می‌توانید از قضیه مقدار میانگین برای توابع چند متغیره استفاده کنید. ۵ نمره)

ج. حجم تصویر مکعب واحد $I = \{0 \leq x,y,z \leq 1\}$ را توسط f محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۲. نشان دهید در نزدیکی نقطه $x = u = -y = -v = 1$ می‌توان u, v را از روی روابط زیر به صورت تابعی مشتق‌پذیر برحسب x, y نوشت و مقادیر u_x و v_x و u_{xy} را در نقطه $x = -y = 1$ بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$uv + xy + u + v = -2 \quad \text{و} \quad uve^{x+y} + xye^{u+v} = -2$$

۳. بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x,y,z) = xyz$ را روی اشتراک دو رویه $x^2 + z^2 = 1$ و $y^2 + z^2 = 1$ محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

۴. انتگرال $\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{2y}^{4} \cos z \, e^{(y/x)} dx \right) dz \right) dy$ را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

۳. فرض کنید $F(x,y,z) = (e^x - (y / (x^2 + y^2)), e^y + (x / (x^2 + y^2)), e^z)$.

الف. نشان دهید $\operatorname{curl} F = 0$ روی $\mathbb{R}^3 - \{x = y = 0\}$. (۵ نمره)

ب. نشان دهید $\int_C F \cdot \overrightarrow{dr} = 4\pi$ که در آن C خم با پرمایش $\gamma(t) = (2 + \cos t)(\cos 2t, \sin 2t, \cos(\sin t))$ روی بازه $[0, 2\pi]$ است. (۱۰ نمره)

ج. آیا این میدان برداری پایستار است؟ (واضح است که باید با دلیل پاسخ دهید. ۵ نمره)

۴. فرض کنید میدان برداری F با رابطه $F(x,y,z) = h(x^2 + y^2 + z^2)(x,y,z)$ داده شده که $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

الف. نشان دهید که F پایستار است و تابع پتانسیل آن را محاسبه کنید. (در همه قسمت‌ها فرض می‌کنیم h هموار است. ۵ نمره)

ب. نشان دهید $\operatorname{div} F = 0$ اگر و تنها اگر $h(u) = cu^{-3/2}$ که در آن c یک مقدار ثابت است. (۵ نمره)

برای دو قسمت (ج) و (د) فرض می‌کنیم میدان F در شرط قسمت (ب) صدق می‌کند.

ج. شار $\int_D F \cdot \vec{n}\, dS$ را زمانی که D صفحه $z = 1$ با جهت به سمت بالا است محاسبه کنید. (۵ نمره)

د. شار $\int_D F \cdot \vec{n}\, dS$ را زمانی که D مربع $\{-1 \leq x, y \leq 1, z = 1\}$ با جهت به سمت بالا است محاسبه کنید. (۵ نمره)

موفق باشید

سوال ۱

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z)=\left(x^3+x-y\ ,\ y^3+y+x\ ,\ z^3+z\right)$$

$$Df(x,y,z)=\begin{bmatrix} 3x^2+1 & -1 & 0 \\ 1 & 3y^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2+1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det Df(x,y,z)=(3z^2+1)\Big((3x^2+1)(3y^2+1)+1\Big)$$

برای هر $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ، $\det Df(x,y,z)\neq 0$. لذا مشتق f همه جا یک به یک است.

ب) $f(x,y,z)=\left(f_1(x,y,z)\ ,\ f_2(x,y,z)\ ,\ f_3(x,y,z)\right)$

$f_1(x,y,z)=x^3+x-y$ ، $f_2(x,y,z)=y^3+y+x$ ، $f_3(z)=z^3+z$

فرض کنید $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ و $f(A)=f(B)$ باشد. با بکارگیری قضیه مقدار میانگین برای مؤلفه های f یعنی f_1 ، f_2 و f_3 داریم:

$$0 = f_{1}(A) - f_{1}(B) = Df_{1}(C_{1}) \cdot (A-B)$$

$$0 = f_{2}(A) - f_{2}(B) = Df_{2}(C_{2}) \cdot (A-B)$$

$$0 = f_{3}(A) - f_{3}(B) = Df_{3}(C_{3}) \cdot (A-B)$$

که در فوق C_{1}، C_{2} و C_{3} سه نقطه روی پاره خط واصل بین A و B است.

$$\Rightarrow \begin{cases} Df_{1}(C_{1}) \cdot (A-B) = 0 \\ Df_{2}(C_{2}) \cdot (A-B) = 0 \\ Df_{3}(C_{3}) \cdot (A-B) = 0 \end{cases}$$

قرار دهید $A-B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$. در این صورت:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 3c_{1}^{2}+1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 3c_{2}^{2}+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3c_{3}^{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3c_{1}^{2}+1)u - v = 0 \\ u + (3c_{2}^{2}+1)v = 0 \\ (3c_{3}^{2}+1)w = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$u = v = w = 0$$

$$\Leftarrow$$

$A = B \Rightarrow f$ یک به یک است.

ج)

$$\text{حجم}\, f(I) = \iiint_{f(I)} dV_{u,v,w} = \iiint_{f(I)} du\,dv\,dw$$

$$\xrightarrow[\text{متغیر}]{\text{تغییر متغیر}} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 |\det Df|\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left[(3x^2+1)(3y^2+1)(3z^2+1) + (3z^2+1)\right] dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 (3x^2+1)\,dx \int_0^1 (3y^2+1)\,dy \int_0^1 (3z^2+1)\,dz$$

$$+ \int_0^1 (3z^2+1)\,dz = 2\cdot 2\cdot 2 + 2 = 10$$

سوال ۲

$$\begin{cases} F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ F(x,y,u,v) = \big(\underbrace{F_1(x,y,u,v)}_{uv+xy+u+v},\ \underbrace{F_2(x,y,u,v)}_{uve^{x+y}+xye^{u+v}}\big) \end{cases}$$

دستگاه داده شده بصورت $F=(-2,2)$ می‌باشد.

F تابعی C^{2} (حتی C^{∞}) است. طبق قضیه تابع ضمنی اگر

$$\det D_{(u,v)} F(p_0) \neq 0 \quad , \quad p_0=(1,-1,1,-1)$$

در این صورت (u,v) را می‌توان به صورت تابعی C^{2} از (x,y) در همسایگی p_0 نوشت و

$$u(+1,-1)=1$$
$$v(1,-1)=-1$$

داریم:

$$DF(p_0)=\left[\; D_{(x,y)}F(p_0) \;\vdots\; D_{(u,v)}F(p_0) \;\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cc:cc} y & x & v+1 & u+1 \\ uve^{x+y}+ye^{u+v} & uve^{x+y}+xe^{u+v} & ve^{x+y}+xye^{u+v} & ue^{x+y}+xye^{u+v} \end{array}\right]_{2\times 4}(p_0)$$

$$\Longrightarrow \quad DF_{(u,v)}(p_0)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det DF_{(u,v)}(p_0)=4\neq 0$$

$$\begin{cases} u(x,y)v(x,y)+xy+u(x,y)+v(x,y)=-2 \\ u(x,y)v(x,y)e^{x+y}+xye^{u(x,y)+v(x,y)}=-2 \end{cases}$$

نسبت به x مشتق بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} u_x v+uv_x+y+u_x+v_x=0 \\ u_x v+uv_x e^{x+y}+uve^{x+y}+ye^{u+v}+xy(u_x+v_x)e^{u+v}=0 \end{cases}$$

اگر قرار دهیم $x=1$ ، $y=-1$ ، $u=u(1,-1)=1$ ، $v=v(1,-1)=-1$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} -u_x(1,-1)+v_x(1,-1)-1+u_x(1,-1)+v_x(1,-1)=0 \\ -u_x(1,-1)+v_x(1,-1)-1-1-u_x(1,-1)-v_x(1,-1)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2v_x(1,-1)=1 \\ -2u_x(1,-1)=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} v_x(1,-1)=\frac{1}{2} \\ u_x(1,-1)=-1 \end{array}$$

نسبت به y مشتق بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} u_y v + u v_y + x + u_y + v_y = 0 \\ (u_y v + u v_y) e^{x+y} + uv e^{x+y} + x e^{u+v} + xy (u_y + v_y) e^{u+v} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -u_y(1,-1) + v_y(1,-1) + 1 + u_y(1,-1) + v_y(1,-1) = 0 \\ -u_y(1,-1) + v_y(1,-1) - 1 + 1 - \big(u_y(1,-1) + v_y(1,-1)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2 v_y(1,-1) = -1 \\ -2 u_y(1,-1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_y(1,-1) = -\frac{1}{2} \\ u_y(1,-1) = 0 \end{cases}$$

حال از معادلهٔ اول نسبت به y مشتق می‌گیریم (یا از بالایی نسبت به x):

$$\begin{cases} u_{xy} v + u_y v_x + u v_{xy} + 1 + u_{xy} + v_{xy} = 0 \\ u_{xy} v + u_x v_y + u_y v_x e^{x+y} + u v_{xy} e^{x+y} + u v_x e^{x+y} + u_y v e^{x+y} \\ \quad + u v_y e^{x+y} + uv e^{x+y} + e^{u+v} + y(u_y + v_y) e^{u+v} \\ \quad + x(u_x + v_x) e^{u+v} + xy(u_{xy} + v_{xy}) e^{u+v} \\ \quad + xy(u_x + v_x)(u_y + v_y) e^{u+v} = 0 \end{cases}$$

با قرار دادن نقطه $P_0=(1,-1,1,-1)$ و استفاده از

$$u(1,-1)=1 \quad , \quad u_x(1,-1)=-1 \quad , \quad v_y(1,-1)=-\frac{1}{2}$$

$$v(1,-1)=-1 \quad , \quad v_x(1,-1)=\frac{1}{4} \quad , \quad u_y(1,-1)=0$$

داریم:

$$\begin{cases} -u_{xy}(1,-1)+v_{xy}(1,-1)+1+u_{xy}(1,-1)+v_{xy}(1,-1)=0 \\ -u_{xy}(1,-1)+\frac{1}{2}+v_{xy}(1,-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\left(u_{xy}(1,-1)+v_{xy}(1,-1)\right) \\ \qquad +\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2v_{xy}(1,-1)=-1 \\ -2u_{xy}(1,-1)=-\frac{1}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} v_{xy}(1,-1)=-\frac{1}{4} \\ u_{xy}(1,-1)=\frac{1}{8} \end{matrix}$$

سوال ۳

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$f(x,y,z)=xyz$$
$$g(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$$
$$h(x,y,z)=y^2+z^2-1=0$$

پنج معادله زیر را باید حل کنیم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h \\ g=0 \\ h=0 \end{cases}$$

$$\nabla f=(yz,xz,xy) \quad , \quad \nabla g=(2x,0,2z)$$
$$\nabla h=(0,2y,2z)$$

پس دستگاه معادلات بصورت زیر است:

$$\Longrightarrow \begin{cases} yz=2x\lambda & (1) \\ xz=2y\mu & (2) \\ xy=2z(\lambda+\mu) & (3) \\ x^2+z^2=1 & (4) \\ y^2+z^2=1 & (5) \end{cases} \qquad (*)$$

از معادله اول و دوم داریم $xyz=2x^2\lambda$, $xyz=2y^2\mu$. پس $2x^2\lambda=2y^2\mu$.

حال از معادله چهارم و پنجم داریم $x^2=y^2$. پس اگر $x,y\neq 0$ ، آنگاه $\lambda=\mu$.

اما اگر $x=y=0$ ، در این صورت $\lambda=-\mu$, $z=\pm 1$. پس یک

دسته جواب بصورت

$$x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=\pm 1\ ,\ \lambda=-\mu$$

است. اما با شرط $x,y\neq 0$، همچنان که گفته شد، $\mu=\lambda$ و $|x|=|y|$. پس از معادله اول بدست می‌آید:

$$|\lambda|=\frac{|z|}{2}.$$

لذا $\lambda=\mu=\pm\frac{z}{2}$. پس از معادله سوم داریم $|x|^2=2|z|\,2|\lambda|$، پس $x^2=2z^2$. لذا از معادله چهارم داریم:

$$3z^2=1 \Rightarrow z^2=\frac{1}{5} \Rightarrow x^2=y^2=\frac{2}{5}.$$

پس $\lambda=\mu=\pm\frac{1}{2\sqrt{5}}$. لذا دسته‌ای دیگر از جواب‌های ممکن بصورت

$$\left(|x|=\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ |y|=\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ |z|=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \lambda=\mu=\pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$$

است.

حال چون که در تابع $f(x,y,z)=xyz$، به دنبال یافتن Max , Min آن هستیم، مقدار آن با تغییر

$$\left\{\begin{array}{l} x\longrightarrow -x\\ y\longrightarrow -y\\ z\longrightarrow -z\end{array}\right.$$

قرینه می‌شود، یعنی $f(-x,-y,-z)=-xyz$ و دامنه آن یعنی $g=0\ ,\ h=0$ هم نسبت به این تبدیل متقارن است. لذا Max , Min f قرینه هستند. پس کافی است Max تابع f را با قیدها پیدا کنیم.

همچنین برای محاسبه‌ی $\operatorname{Max} f$ کافی است نقاط بحرانی را بررسی کنیم که در آن $f(x,y,z)=xyz$ مثبت است (زیرا این تابع صفر نمی‌باشد). پس از میان نقاط بحرانی همان‌هایی که قبلاً یافته شد، آن‌هایی را بررسی می‌کنیم که $xyz>0$.

اما در این صورت $\lambda,\mu>0$. پس کافی است جواب

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad z=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

را با

$$\lambda=\mu=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

بررسی کنیم. این نقاط در دستگاه $(*)$ صدق می‌کنند. پس ماکسیمم f در این نقطه رخ می‌دهد زیرا در نقاط دیگر یا f منفی است یا صفر است یا همان مقدار xyz را می‌دهد، مثلاً $y=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

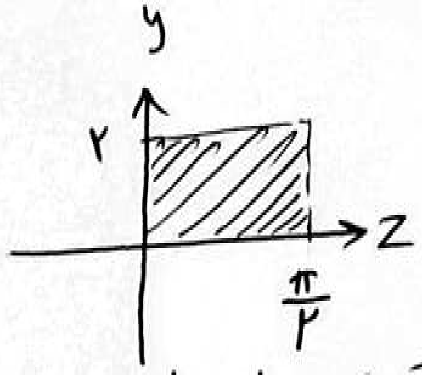
بعلاوه قبلاً اشاره شد که

$$\min f=-\max f$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \min f=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \\[2ex] \max f=\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

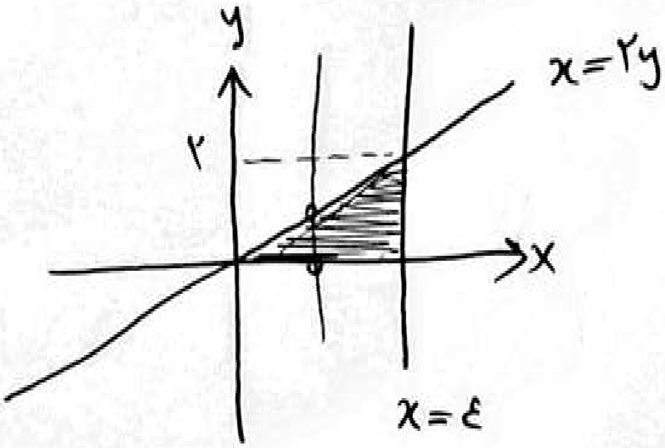
سوال ۴

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2y}^{4} \cos z \, e^{\frac{y}{x}} \, dx \right) dz \right) dy$$



تعویض dz و dy :

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \int_{2y}^{4} \cos z \, e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy \, dz$$



حال ترتیب dx و dy را عوض می‌کنیم:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4} \int_0^{\frac{x}{2}} \cos z \, e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx \, dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4} x \cos z \, e^{\frac{y}{x}} \Big|_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} dx \, dz$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۴} \left\{ x\cos z \, e^{\frac{۱}{۲}} - x\cos z \right\} dx \, dz$$

$$= \left(\sqrt{e} - ۱\right) \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۴} x\cos z \; dx \, dz$$

$$= \left(\sqrt{e} - ۱\right) \left(\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos z \, dz \right) \left(\int_{۰}^{۴} x \, dx \right)$$

$$= \left(\sqrt{e} - ۱\right) (۱) (۸) = ۸ \left(\sqrt{e} - ۱\right)$$

سوال ۵ :

الف)

$$F(x,y,z)=\left(e^{x}-\frac{y}{x^{2}+y^{2}},\ e^{y}+\frac{x}{x^{2}+y^{2}},\ e^{z}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Curl} F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}e^{x}-\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\\ e^{y}+\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\\ e^{z}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}e^{z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{y}+\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}(e^{z})-\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{x}-\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y}+\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x}-\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\right)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0-0\\ 0-0\\ \frac{x^{2}+y^{2}-2x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}+\frac{x^{2}+y^{2}-2y^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}=0$$

ب) فرض کنید $\gamma(t)=(X_1(t),X_2(t),X_3(t))$. در این صورت

$X_1(t)=(2+\cos t)\cos 2t$, $X_2(t)=(2+\cos t)\sin 2t$, $X_3(t)=(2+\cos t)\cos(\sin t)$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(e^{x_1} - \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)dx_1(t)$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(e^{x_2} + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)dx_2(t) + \int_0^{2\pi} e^{x_3(t)}\,dx_3(t)$$

هر کدام از عبارت های $\int_0^{2\pi} e^{x_i(t)}\,dx_i(t)$ برابر صفر است زیرا

$$\int_0^{2\pi} e^{x_i(t)}\,dx_i(t) = e^{x_i(t)}\Big|_0^{2\pi} = e^{x_i(2\pi)} - e^{x_i(0)} = 0$$

یا

$$\int_0^{2\pi} e^{x_i(t)}\,\dot{x}_i(t)\,dt = e^{x_i(t)}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

پس:

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi} \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\,dx_1(t) + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\,dx_2(t) = \int_{\gamma_1} P\cdot dr$$

$$\cdot\ P = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),\quad \gamma_1(t) = (x_1(t), x_2(t))$$ ۵

ص ۱۴

حال چون برای هر $(x,y)\neq 0$ ، $\operatorname{curl} P = 0$ ، پس طبق قضیه گرین،

مقدار $\int P\cdot dr$ روی هر دو خم که شامل مبدأ باشند و به تعداد دفعات یکسانی حول

صفر چرخیده باشند را برابرند. حال توجه کنید که خم

$$r(t) = (2+\cos t)\left(\cos 2t , \sin 2t\right) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

دو بار حول مبدأ در جهت مثلثاتی می‌چرخد، پس به جای r می‌توان از

$$r_1(t) = (\cos 2t , \sin 2t)$$

استفاده کرد. بنابراین

$$\int_C F\cdot dr = \int_{\gamma_1} P\cdot dr = \int_{r_1} P\cdot dr = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin 2t}{\sin^2 2t + \cos^2 2t}\, d(\cos 2t)$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{\sin^2 2t + \cos^2 2t}\, d(\sin 2t)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left(\sin^2 2t + \cos^2 2t\right) dt$$

$$= 4\pi$$

البته $\int_{r} P\cdot dr$ را می‌توان مستقیماً هم به صورت زیر داشت: ص ۱۵

$$\int_{r} p\cdot dr = \int_{0}^{2\pi} \frac{-\sin 2t\,(2+\cos t)}{(2+\cos t)^2}\, d\left[(2+\cos t)\cos 2t\right]$$

$$+\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2t\,(2+\cos t)}{(2+\cos t)^2}\, d\left[(2+\cos t)\sin 2t\right]$$

$$=\int_{0}^{2\pi} \frac{-\sin 2t}{2+\cos t}\Big(-\sin t\cos 2t-(2+\cos t)(2\sin 2t)\Big)\,dt$$

$$+\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2+\cos t}\Big(-\sin t\sin 2t+(2+\cos t)(2\cos 2t)\Big)\,dt$$

$$=\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin 2t\cdot\cos 2t\cdot\sin t}{2+\cos t}-\frac{\cos 2t\cdot\sin t\cdot\sin 2t}{2+\cos t}\,dt$$

$$+\int_{0}^{2\pi} 2\sin^2 2t\,dt+2\int_{0}^{2\pi}\cos^2 2t\,dt=\int_{0}^{2\pi}2\,dt=4\pi$$

ج) چون $\int_{C} F\cdot dr = 4\pi \neq 0$ است پس میدان F پایستار نیست زیرا خم C بسته است و اگر F پایستار بود، بایستی کار انجام شده توسط میدان F برای حرکت دادن ذره‌ای روی خم C صفر می‌شد که چنین نیست.

سوال ۲

$$\vec{F}(x,y,z) = h(x^2+y^2+z^2)\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right)$$

$$h : \mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{\text{هموار}} \mathbb{R}$$

الف)

$$\vec{F}(x,y,z) = h(x^2+y^2+z^2)\,x\,\vec{i} + h(x^2+y^2+z^2)\,y\,\vec{j} + h(x^2+y^2+z^2)\,z\,\vec{k}$$

$$F_1(x,y,z) = h(x^2+y^2+z^2)\,x$$

$$F_2(x,y,z) = h(x^2+y^2+z^2)\,y$$

$$F_3(x,y,z) = h(x^2+y^2+z^2)\,z$$

شرط لازم پایستار بودن را بررسی می‌کنیم؛ یعنی:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy\,h'(x^2+y^2+z^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy\,h'(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 2xz\,h'(x^2+y^2+z^2), \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2xz\,h'(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2yz\,h'(x^2+y^2+z^2), \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2yz\,h'(x^2+y^2+z^2)$$

فرض کنید f یک تابع پتانسیل برای $\vec{F}$ باشد، یعنی $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = F_2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = F_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = x\, h(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow f(x,y,z) = \int_0^t t\, h(t^2+y^2+z^2)\, dt + k(y,z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}\int_{y^2+z^2}^{x^2+y^2+z^2} h(u)\, du + k(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y\, h(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}\left(2y\, h(x^2+y^2+z^2) - 2y\, h(y^2+z^2)\right) + \frac{\partial k}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k}{\partial y} = y\, h(y^2+z^2) \Rightarrow k(y,z) = \frac{1}{2}\int_{z^2}^{y^2+z^2} h(u)\, du + C(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}\int_{y^2+z^2}^{x^2+y^2+z^2} h(u)\, du + \frac{1}{2}\int_{z^2}^{y^2+z^2} h(u)\, du + C(z)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{z^2}^{x^2+y^2+z^2} h(u)\, du + C(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = z\,h(x^2+y^2+z^2) = c'(z) + \frac{1}{2}\left(2z\,h(x^2+y^2+z^2) - 2z\,h(z^2)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad c'(z) = z\,h(z^2)$$

$$\Longrightarrow \quad c(z) = \frac{1}{2}\int_0^{z^2} h(u)\,du$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,y,z) = \frac{1}{2}\int_0^{z^2} h(u)\,du + \frac{1}{2}\int_{z^2}^{x^2+y^2+z^2} h(u)\,du$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,y,z) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2} h(u)\,du$$

f یک تابع پتانسیل برای میدان برداری F است و در نتیجه F پایستار است.

ب)

$$\operatorname{div} F = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow h(x^2+y^2+z^2) + 2x^2 h'(x^2+y^2+z^2) + h(x^2+y^2+z^2) + 2y^2 h'(x^2+y^2+z^2) + h(x^2+y^2+z^2) + 2z^2 h'(x^2+y^2+z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3h(x^2+y^2+z^2) + 2(x^2+y^2+z^2)\, h'(x^2+y^2+z^2) = 0$$

قرار می‌دهیم:

$$u = x^2+y^2+z^2.$$

پس

$$3h(u) + 2u h'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{h'(u)}{h(u)} = -\frac{3}{2u}$$

$$\Leftrightarrow \ln h(u) = -\frac{3}{2} \ln u + C \Leftrightarrow h(u) = \frac{c}{u^{\frac{3}{2}}}$$

پس:

$$\boxed{h(u) = c u^{-\frac{3}{2}}}$$

$$D=\{(x,y,۱) : x,y\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \vec{n}=\hat{k}=(۰,۰,۱)$$ ج)

$$\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D z\, h(x^۲+y^۲+z^۲)\, dS$$

$$= \iint_D z\cdot c\,(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}}\, dS$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^۲} \frac{c}{(x^۲+y^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dx\,dy$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\infty} \frac{cr}{(r^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dr\,d\theta$$

$$= ۲\pi c \int_۰^{\infty} \frac{r}{(r^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dr$$

$$= \pi c \int_۰^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{۳}{۲}}} = \pi c \left(-۲(u+۱)^{-\frac{۱}{۲}} \Big|_۰^{\infty}\right)$$

$$= ۲\pi c$$

۱)

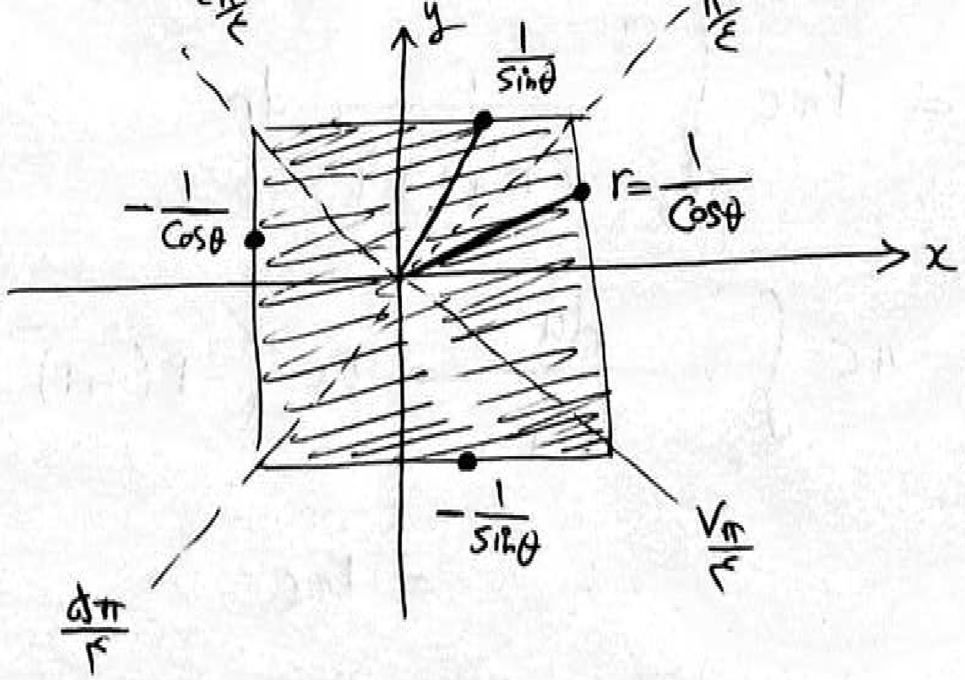
$$D' = \{ (x,y,1) : -1 \le x,y \le 1,\ z=1 \}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{n} = \hat{k} = (0,0,1)$$

$$\Longrightarrow \iint_{D'} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_{D'} z\, h(x^2+y^2+z^2)\, dS$$

$$= \iint_{D'} \frac{cz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dS$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{c}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy$$



امّا بدلیل تقارن:

$$= 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{cr}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dr\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \frac{cr}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dr\,d\theta\right)$$

$$= 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-c}{\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}+c\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-c}{\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}+c\,d\theta\right)$$

$$= 2\pi c - 4c\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\,d\theta - 4c\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= 2\pi c - 4c\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) - 4c\left(-\sin^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= 2\pi c - 4c\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4c\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi c - \frac{4\pi c}{3} = \frac{2\pi c}{3}$$